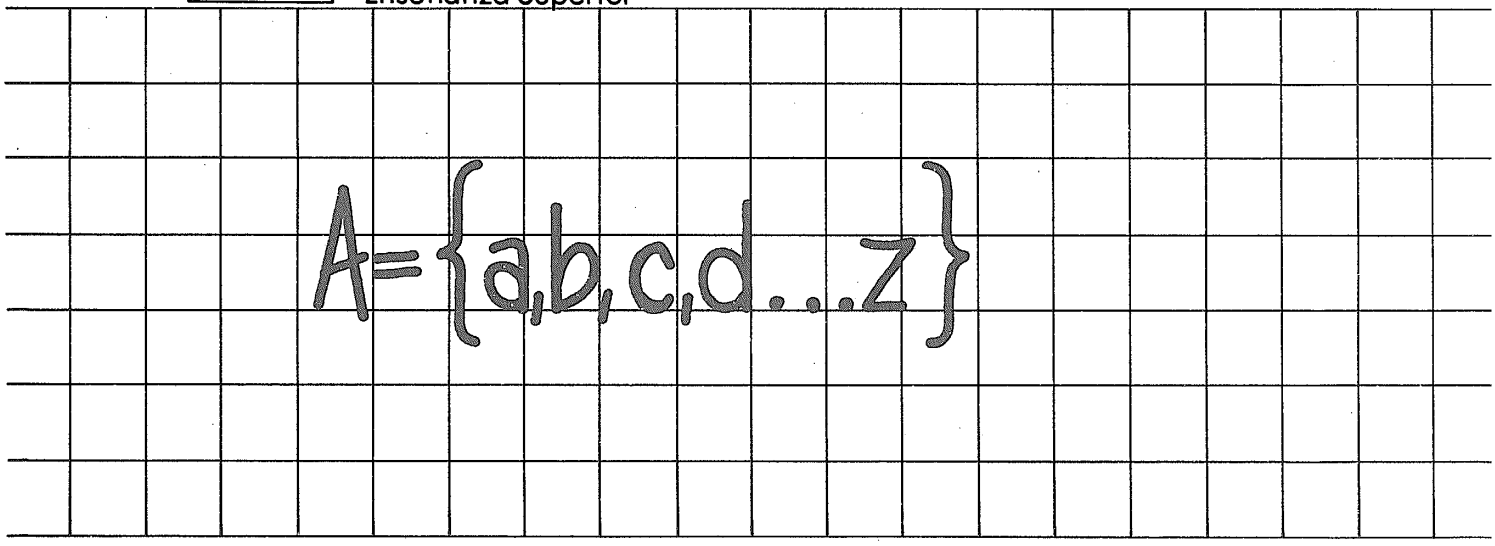
EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. ***El conjunto de los enteros***
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. El conjunto de los racionales
11. Operaciones con expresiones racionales
12. El conjunto de los reales
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 1

Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 3

EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1503-9

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

3.1 El conjunto de los naturales 9

3.2 Las cuatro operaciones binarias fundamentales 16

3.3 El monomio abeliano ($\mathbb{N}$, X) 30

3.4 Invención de los números negativos 36

3.5 El conjunto de los enteros 41

3.6 El grupo abeliano de la adición en $\mathbb{Z}$ 60

3.7 El monoide abeliano de la multiplicación en $\mathbb{Z}$ 70

3.8 El anillo ($\mathbb{Z}$, + X) 78

3.9 El grupoide de la sustracción en $\mathbb{Z}$ 80

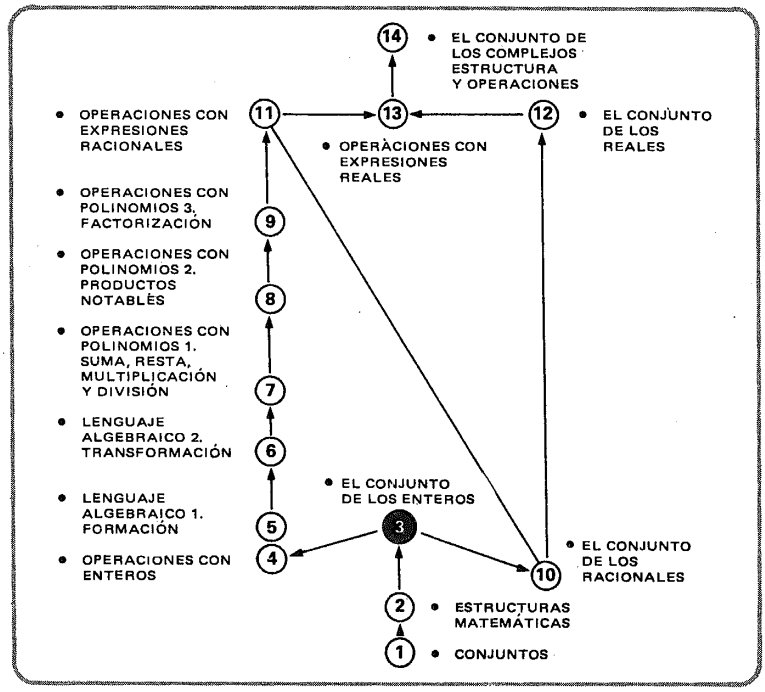
3.10 La división en $\mathbb{Z}$ 84

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 3. El conjunto de los enteros

Objetivos: interpretar la suma y multiplicación de enteros como estructuras matemáticas con ciertas propiedades, de las que se deducen las reglas para la realización de dichas operaciones

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: suma, resta, multiplicación y división	—	—
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Propiedades de las operaciones binarias: clausura, asociatividad, existencia de elementos neutro o inversos, conmutatividad y distributividad	1	2
• Nociones de las estructuras matemáticas con una o dos leyes de composición interna	1	2

3.1

El conjunto de los naturales

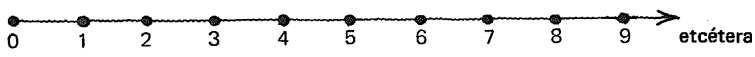
1

Supongamos, por un momento, que nos encontramos en una etapa primitiva de la evolución de la humanidad, y que los unicos números que conocemos son los siguientes:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, . . .

2

Convengamos en representarlos así:



3

Tales números constituyen un

conjunto

¿ finito o infinito ?

infinito

4

Convengamos, también
en llamar a este conjunto
infinito

el conjunto de los
números naturales

y simbolicémoslo así:

$\mathbb{N}$

5

Este conjunto,
definido

por extensión o
enumeración de sus elementos,

quedaría representado
simbólicamente así:

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3. . . \}$

6

Por comprensión,

utilizando la

notación descriptiva,

nuestro conjunto
quedaría representado
así:

└_____┘

$\mathbb{N} = \{x | x \text{ es un número natural}\}$

7

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$

¿Están **ordenados** de menor a mayor los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ así simbolizado?

Sí/No

Sí

8

El **menor** de los números naturales es: └_____┘

0 (cero)

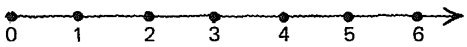
9

El **mayor** de los números naturales es: ⌊_____⌋

no existe

10

En la representación gráfica de $\mathbb{N}$



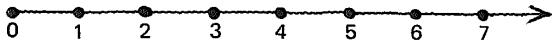
observamos que
si, por ejemplo,

5 > 2

5 está a la ⌊_____⌋ de 2.
izquierda/derecha

derecha

11

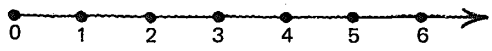


Si **1 < 4**

1 está a la ⌊_____⌋ de 4.
izquierda/derecha

izquierda

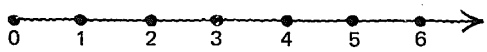
12



Con base en la representación gráfica de $\mathbb{N}$, ¿podemos afirmar que si $a < b$ entonces, **a** está a la izquierda de **b**?

Sí

13



Con base en la gráfica de $\mathbb{N}$, ¿podemos afirmar que,

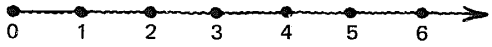
si **a** está a la izquierda de **b**,

entonces $a < b$?

Sí/No

Sí

14



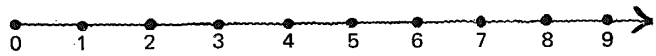
Podemos afirmar que, para $a, b \in \mathbb{N}$,

$a < b$ ⟷ a está a la izquierda de b, en la representación gráfica de $\mathbb{N}$

si y sólo si

15

Completar, escribiendo los signos que faltan.



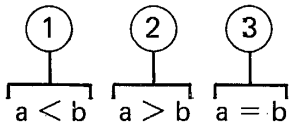
Ahora bien,
si a y b son dos
números naturales,
puede suceder que:

1. $a < b$
2. a␣b
3. a␣b

1. $a < b$
2. $a > b$
3. $a = b$

16

Si a y b son dos números naturales,
puede ocurrir alguna de estas **tres** cosas:



Esta clasificación o división en tres partes se llama **tricotomía.**

1.3.1.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

1.3.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

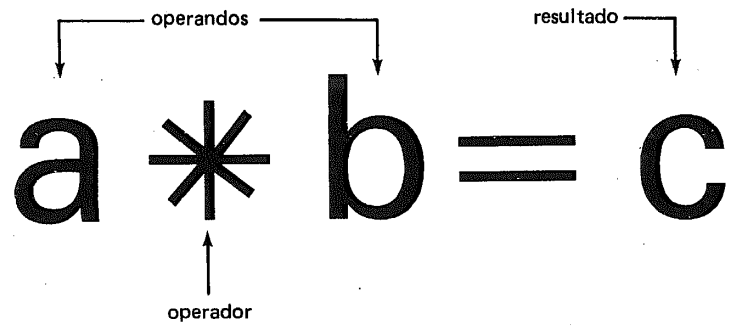
- *identificar* los números naturales, de un conjunto dado de números;
- *representar* simbólicamente, por comprensión o por extensión, el conjunto de los números naturales;
- *representar* gráficamente el conjunto de los números naturales;
- *explicar* en qué consiste la propiedad de tricotomía de los números naturales.

3.2

Las cuatro operaciones binarias fundamentales

17

Recordemos el concepto de **operación binaria,** a través de este esquema:



18

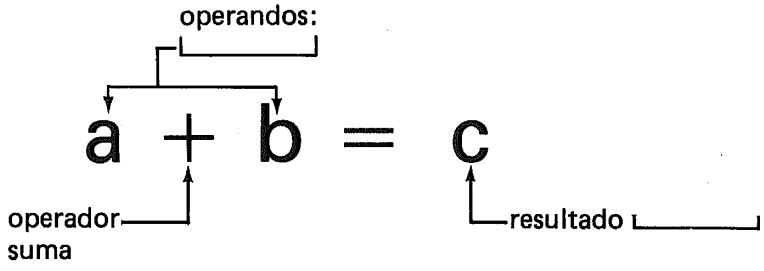
Estamos familiarizados con estas

4 operaciones binarias:

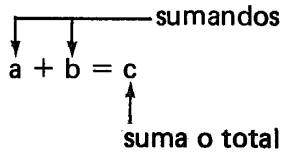
- suma o adición
- resta o sustracción
- multiplicación
- división

19

1. En la **suma o adición**, a los operandos se les llama _____ y al resultado _____

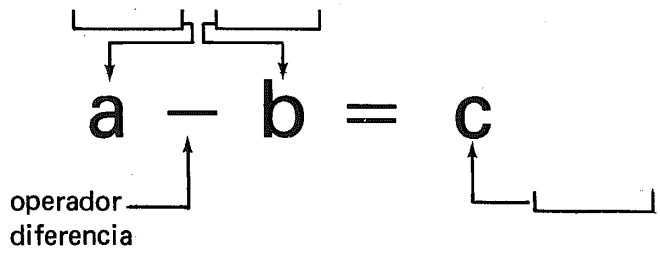


- sumandos
- suma o total

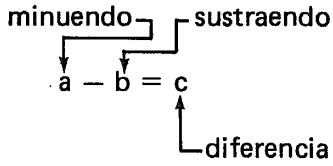


20

2. En la **resta o sustracción** llamamos a los operandos _____ y _____, y al resultado _____

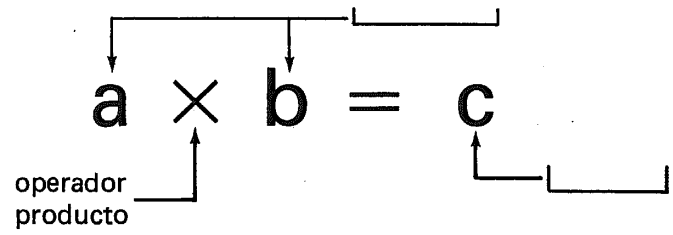


- minuendo
- sustraendo
- diferencia

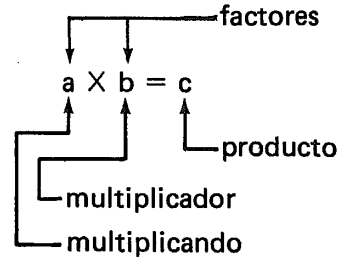


21

3. En la **multiplicación**, los operandos reciben el nombre de _____, y el resultado _____

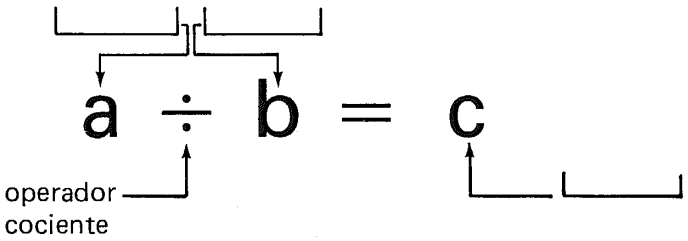


- factores (o multiplicando y multiplicador)
- producto

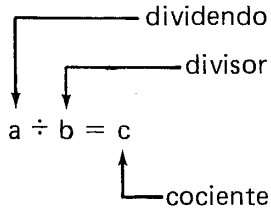


22

4. En la **división**, a los operandos se les denomina [ ] y [ ], y al resultado [ ]



- dividendo
- divisor
- cociente



23

Tenemos aquí una representación alternativa de la **división.**

$$\frac{a}{b} = c$$

operador
cociente

24

El monoide abeliano ($\mathbb{N}$, +)

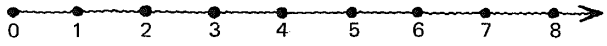
25

Debemos suponer
que **no** conocemos,
por el momento,
más que
los números:

0, 1, 2, 3, 4, 5. . .

26

Si tomamos dos **números naturales**
cualesquiera y los **sumamos**



podremosver en forma intuitiva, si el resultado
es siempre **un número natural.**

27

Exploraremos las 3 posibilidades
estudiadas en el submódulo anterior.

1. En a + b = c,
   si a = b

el resultado **c**, ¿es siempre un número natural?

Sí/No

Por ejemplo: [_____]

- **Sí**
  Por ejemplo:
- **5 + 5 = 10**
  100 + 100 = 200
  0 + 0 = 0
  ↓
  etcétera

28

2. En a + b = c
si a > b

el resultado **c**, ¿es siempre un número natural:?

Sí/No

Por ejemplo: ⌊_____⌋

- Sí
  Por ejemplo:
- 7 + 2 = 9
  1200 + 50 = 1250
  100 + 0 = 100
  ↓
  etcétera

29

3. En a + b = c,
si a < b

el resultado **c**, ¿es siempre un número natural?

Sí/No

Por ejemplo:

⌊_____⌋

- Sí
  Por ejemplo:
- 2 + 5 = 7
  0 + 10 = 10
  25 + 100 = 125
  ↓
  etcétera

30

Decimos que:

el resultado c está en el conjunto $\mathbb{N}$,

...pertenece al conjunto $\mathbb{N}$,

o

...es un elemento del conjunto $\mathbb{N}$.

31

Simbólicamente, en

a + b = c

si a, b ∈ ℕ

entonces [_____]

c ∈ ℕ

32

En a + b = c
si a, b ∈ ℕ
entonces c ∈ ℕ

Nos encontramos ante la propiedad de las operaciones binarias que se conoce con el nombre de:

[_____]

clausura o cerradura

que puede expresarse, en forma general, así:

En a * b = c
si a, b ∈ S
entonces c ∈ S

33

Decimos que:

"La suma o adición
es una operación

cerrada

para el conjunto de los
números naturales",
o que:
"El conjunto ℕ (de los naturales)
es **cerrado**
para la adición".

34

En otras palabras:

"La adición **está definida** en el conjunto $\mathbb{N}$."

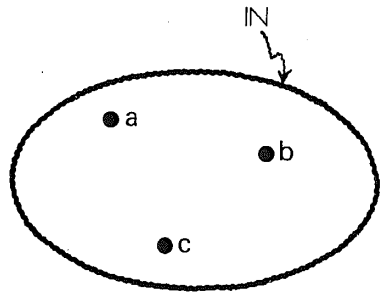
o bien:

"La adición **tiene sentido** para cualquier par de números naturales".

35

Gráficamente:

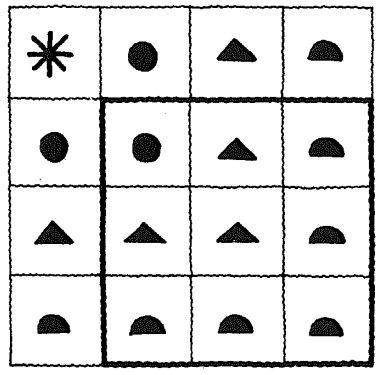
$a + b = c$



36

Ahora, recordemos lo que es una

tabla binaria.



37

Completemos la **tabla binaria** para la **suma** o **adición** en $\mathbb{N}$.

+	0	1	2	3	4	5				n
0										
1										
2										
3										
4										
5										
n										

Respuesta en el cuadro siguiente

Tabla binaria para la suma o adición en $\mathbb{N}$, que nos permite "ver" la clausura de esta operación en el conjunto considerado.

+	0	1	2	3	4	5				n
0	0	1	2	3	4	5				n
1	1	2	3	4	5	6				n+1
2	2	3	4	5	6	7				n+2
3	3	4	5	6	7	8				n+3
4	4	5	6	7	8	9				n+4
5	5	6	7	8	9	10				n+5
n	n	n+1	n+2	n+3	n+4	n+5				n+n

a < b

a = b

a > b

38

Ahora tomemos tres números cualesquiera, (a, b, c), de nuestro conjunto $\mathbb{N}$, y efectuemos con ellos las operaciones indicadas.

1. (a + b) + c
2. a + (b + c)

¿Sucede siempre que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)?$$

Sí/No

Por ejemplo: ⌊_____⌋

- Sí

  Por ejemplo:

- para a = 2
  b = 5
  c = 8

$$(2 + 5) + 8 = 7 + 8 = 15$$
$$2 + (5 + 8) = 2 + 13 = 15$$

39

Puesto que

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

se cumple para toda tercia de números
a, b, c $\in \mathbb{N}$, decimos que,
la propiedad de las operaciones binarias
que se conoce con el nombre de

_____

se cumple para la suma o adición
en el conjunto de los naturales.

asociatividad

40

Expresándolo de otra manera:

"La suma o adición es una
operación **asociativa en** el conjunto
de los naturales".

41

Investiguemos, ahora,
si existe en la suma en $\mathbb{N}$
un **elemento neutro o**
de identidad es decir:

$$a + ? = a$$

para cualquier número **a.**

42

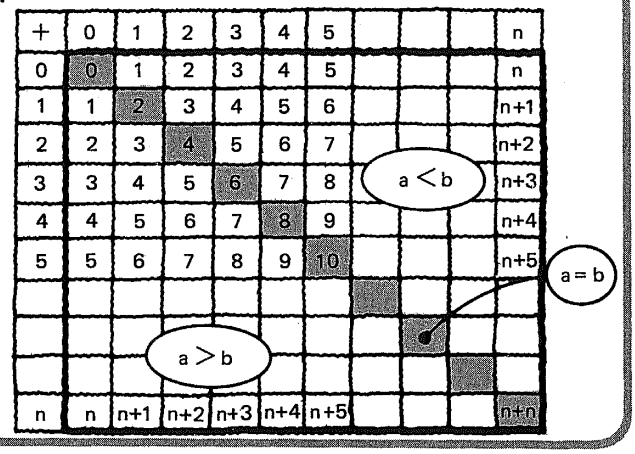
De la observación cuidadosa de la tabla binaria para la suma en $\mathbb{N}$, digamos si existe o no un elemento neutro para esta operación.

a + ? = a

¿Existe elemento neutro para la suma de naturales?

Sí/No

En caso afirmativo tal elemento es



Sí

0 (cero)

43

Hemos encontrado que:

0 (cero)

es el **elemento neutro** o de **identidad** de la suma o adición en el conjunto de los naturales.

O sea que:

$a + 0 = a$

para toda $a \in \mathbb{N}$

44

Se trata, ahora, de investigar si existe un **elemento inverso** para todo número natural.

x + ? = 0

inverso — elemento neutro o de identidad

45

Pongámoslo en esta forma:

$0 + ? = 0$
$1 + ? = 0$
$2 + ? = 0$
$3 + ? = 0$

En general: ↓

$x + x' = 0$

Escribamos nuestra conclusión, obtenida con ayuda de la tabla binaria de la suma en $\mathbb{N}$.

El 0 (cero) es el único elemento de $\mathbb{N}$ que tiene **inverso aditivo,** y es el mismo 0.

Es decir, que:

$0 + 0 = 0$

pero no existen en $\mathbb{N}$ otros elementos x', tales que:

$x + x' = 0$

46

No olvidemos, entonces, que:

El 0 (cero) es el único elemento de $\mathbb{N}$ que tiene **inverso aditivo.**

47

Si a y b son dos números naturales cualesquiera, veamos si se cumple:

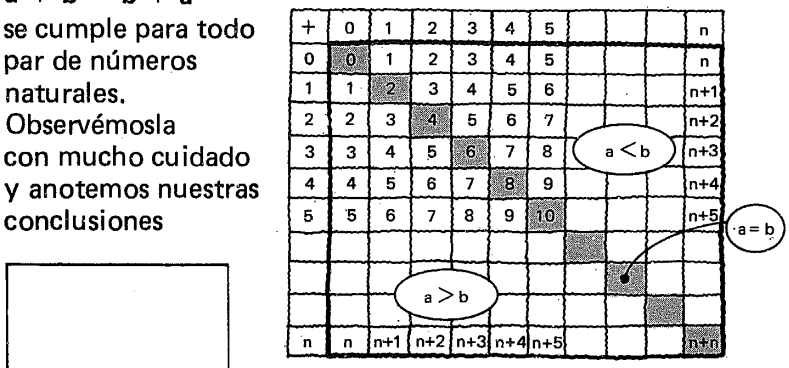
$\mathbf{a + b = b + a}$

Véase el cuadro siguiente.

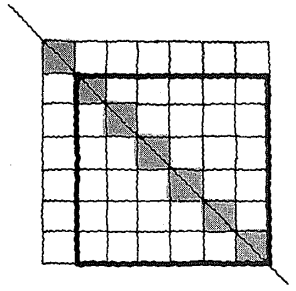
48

Nuevamente la tabla binaria nos ayudará a determinar si

a + b = b + a
se cumple para todo par de números naturales. Observémosla con mucho cuidado y anotemos nuestras conclusiones



a + b = b + a
para todo
a, b ∈ ℕ
(observamos la "simetría" de la tabla con respecto a la diagonal principal.)



49

Decimos que:

La adición es una operación [conmutativa] en el conjunto de los naturales.

O bien, que:

"El orden de los sumandos no altera el total"
para la suma en ℕ.

50

En resumen,
la suma o adición en ℕ,
¿cumple con las siguientes propiedades?

		Sí/No
1.	Cerradura o clausura	
2.	Asociatividad	
3.	Existencia de elemento neutro o de identidad*	
4.	Existencia de elementos inversos para todos los elementos de ℕ	
5.	Conmutatividad	

*Indicar el elemento neutro, en caso de que exista.

Ver cuadro siguiente

51

La suma o adición en $\mathbb{N}$
cumple con las siguientes propiedades:

1.	Cerradura o clausura		Sí
2.	Asociatividad		Sí
3.	Existencia de elemento neutro o de identidad*	0	Sí
4.	Existencia de elementos inversos para todos los elementos de $\mathbb{N}$		No
5.	Conmutatividad		Sí

*El elemento neutro para la suma de naturales es el cero.

52

Ahora bien,
recordemos que
a un par constituido por un

conjunto (como el $\mathbb{N}$)

y una **operación binaria**

definida en él (como la suma)

le hemos dado el nombre de

└_____┘

estructura matemática

53

Entonces,
la suma o adición en $\mathbb{N}$
es una

estructura matemática

que simbolizamos así:

└_____┘

$(\mathbb{N}, +)$

54

¿Se cumple?

1.	Cerradura o clausura		Sí
2.	Asociatividad		Sí
3.	Existencia de elemento neutro	O	Sí
4.	Existencia de elementos inversos		No
5.	Conmutatividad		Sí

Por cumplir con las propiedades señaladas, la estructura ($\mathbb{N}$, +) recibe el nombre de

monoide abeliano

55

La expresión

($\mathbb{N}$, +)

representa el

monoide abeliano

de la suma o adición en el conjunto de los naturales.

1.3.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la suma o adición en $\mathbb{N}$ como una estructura matemática llamada monoide abeliano, que cumple con las siguientes propiedades:

  — cerradura,
  — asociatividad,
  — existencia de elemento neutro (0),
  — conmutatividad.

3.3

El monoide abeliano (ℕ, X)

56

Analicemos otra estructura

(ℕ, X)

57

Completemos la **tabla binaria de la multiplicación de números naturales.**

a X b = c

a, b ∈ ℕ

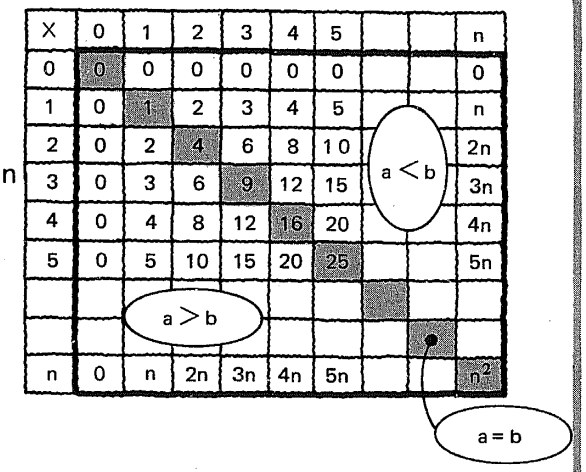
X	0	1	2	3	4	5			n
0									
1									
2									
3									
4									
5									
n									

Respuesta en el cuadro siguiente

Tabla binaria de la multiplicación de naturales.

$a \times b = c$

$a, b \in \mathbb{N}$



X	0	1	2	3	4	5			n
0	0	0	0	0	0	0			0
1	0	1	2	3	4	5			n
2	0	2	4	6	8	10			2n
3	0	3	6	9	12	15			3n
4	0	4	8	12	16	20			4n
5	0	5	10	15	20	25			5n
n	0	n	2n	3n	4n	5n			n^2

58

Observemos la tabla binaria del cuadro anterior y respondamos:

¿Se cumple con la propiedad **de clausura o cerradura** para la multiplicación en $\mathbb{N}$?

Sí/No

Sí
(La **multiplicación** es una operación **cerrada** en $\mathbb{N}$)

59

Si a, b, c son tres números naturales cualesquiera,

¿se cumple

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$?

Sí/No

Sí

(la **multiplicación** en $\mathbb{N}$ es **asociativa**)

60

Para la multiplicación
de números naturales,
¿existe **elemento neutro**
o de identidad?

Sí/No

En caso de existir,
y llamándole e:

e = ⌊_____⌋

Sí

1

61

Podemos escribir:

$$a \times 1 = a$$

para toda $a \in \mathbb{N}$

62

En la multiplicación de naturales,
¿existe **elemento inverso**
para todo elemento de $\mathbb{N}$?
Observemos la tabla binaria correspondiente,
y anotemos nuestras conclusiones:

⌊_____⌋

$0 \times ? = 1$
$1 \times 1 = 1$
$2 \times ? = 1$
$3 \times ? = 1$
$4 \times ? = 1$

El 1 es el único número
natural que tiene **inverso**
multiplicativo y es el
mismo 1.

63

Tomemos nota de esto:

El 1 es el único elemento de $\mathbb{N}$ que tiene **inverso multiplicativo.**

64

¿Se cumple

$$a \times b = b \times a$$

para todo a, b $\in \mathbb{N}$?

Sí/No

Observar con atención la tabla binaria de la multiplicación en $\mathbb{N}$.

Sí

65

La multiplicación

es una operación

[_____]

en el conjunto de los naturales.

Para la multiplicación en $\mathbb{N}$, "el orden de los factores no altera el producto".

conmutativa

66

La estructura matemática

$(\mathbb{N}, \times)$

es un [_____]

monoide abeliano

67

Ahora bien,

para $(\mathbb{N}, +\ \times)$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

para todo a, b, c $\in \mathbb{N}$

V/F

V

68

A la propiedad expresada por:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

se le llama

[_____]

de la multiplicación con respecto a la suma,
en el conjunto de los naturales.

distributividad

69

Observemos con atención estas dos expresiones.

$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$$

Distributividad a la izquierda.

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

Distributividad a la derecha.

1.3.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la multiplicación en $\mathbb{N}$ como una estructura matemática llamada monoide abeliano, que cumple con las siguientes propiedades:
  - cerradura,
  - asociatividad,
  - existencia de elemento neutro (1),
  - conmutatividad.

3.4

Invención de los números negativos

70

La **sustracción** o **resta** puede ser representada en esta forma:

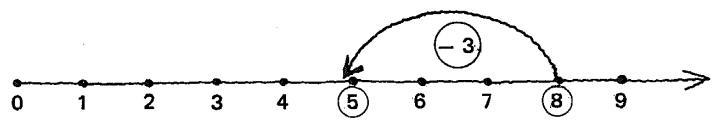
operador diferencia — diferencia

$$a - b = c$$

minuendo — sustraendo

71

He aquí un ejemplo de resta o sustracción gráficamente representado.



8 − 3 = 5

72

Completemos
la **tabla binaria**
para la **resta**
o **sustracción** en $\mathbb{N}$

$\mathbf{a - b = c}$

−	0	1	2	3	4	5			n
0									
1									
2									
3									
4									
5									
n									

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Tabla binaria
para la **resta**
o **sustracción** en $\mathbb{N}$

$\mathbf{a - b = c}$

−	0	1	2	3	4	5			n
0	0								
1	1	0							
2	2	1	0						
3	3	2	1	0					
4	4	3	2	1	0				
5	5	4	3	2	1	0			
n	n	n−1	n−2	n−3	n−4	n−5			0

a < b

a > b

a = b

Véase el cuadro siguiente.

73

La resta o sustracción

se define

únicamente
para $\mathbf{a \geqslant b}$.

74

No tiene sentido hablar de resta o sustracción en $\mathbb{N}$ para

$$a < b.$$

Por ejemplo:

$$5 - 7 = ?$$

75

Si queremos que la sustracción o resta **se defina para todo par de números naturales,** será necesario **inventar** otros números.

Para $a < b$
$a - b = ?$

76

Si $a, b \in \mathbb{N}$ y $a < b$
diremos que

$$\mathbf{a - b = -\,(b - a)}$$

"menos"

Así, quedan definidos los nuevos números que llamaremos

números negativos.

77

Por ejemplo, en la expresión:

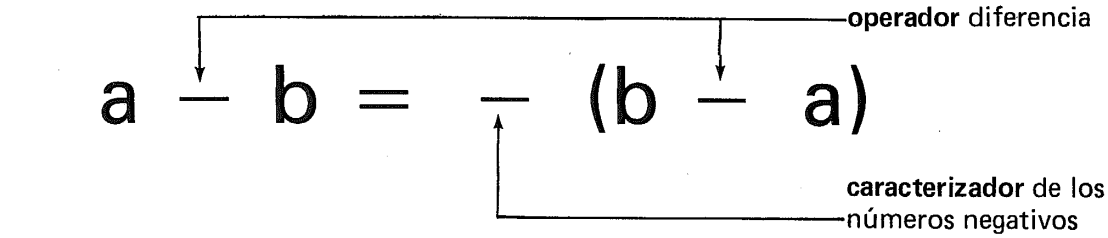
$$5 - 8 = -(8 - 5) = -3$$

estamos aceptando la existencia del número -3.

Es muy importante notar la doble función, operadora y calificadora, del signo $-$.

78

En la expresión



debemos tomar nota de la doble función del signo negativo (−):

- como **operador diferencia**
  y
- como **caracterizador de los números negativos**

79

A partir de este momento

$$-3$$

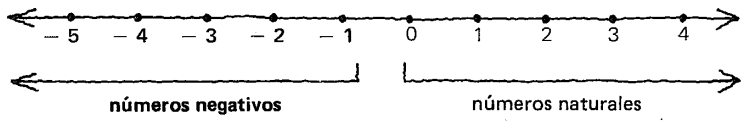
deberá ser considerado como un número tan válido como el

$$3$$

o cualquier otro de los naturales.

80

Entonces, si agregamos los números negativos a la gráfica de $\mathbb{N}$, ésta queda así:



números negativos números naturales

1.3.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* por qué es necesario ampliar el conjunto de los naturales para que la sustracción o resta se defina para todo par de números naturales.

3.5

El conjunto de los enteros

81

Al nuevo conjunto formado por

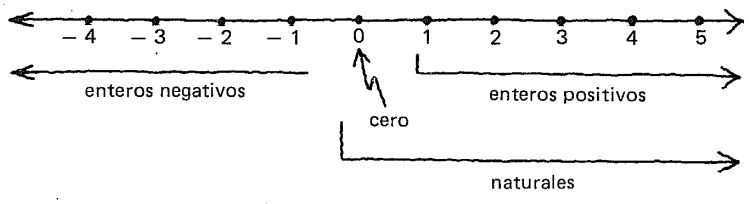
la unión de los naturales y los negativos

lo denominaremos

conjunto de los enteros.

82

Estudiemos con atención la siguiente gráfica de los números enteros.

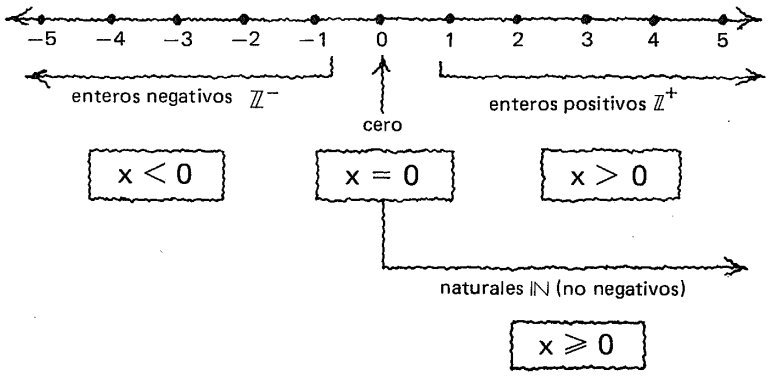


83

Un símbolo para el nuevo conjunto: $\mathbb{Z}$

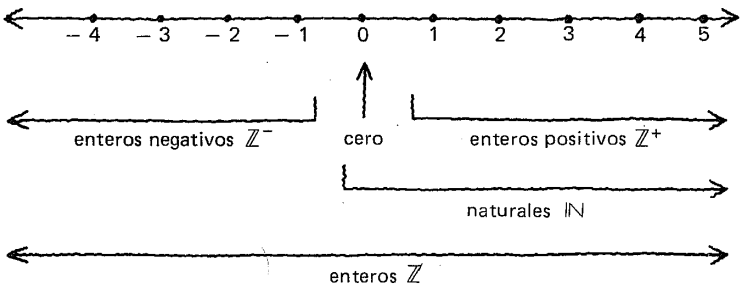
84

Debemos observar con detenimiento, la diferencia entre **positivo** y **no-negativo**, y tomar nota de las formas de representar los diferentes subconjuntos de enteros.



85

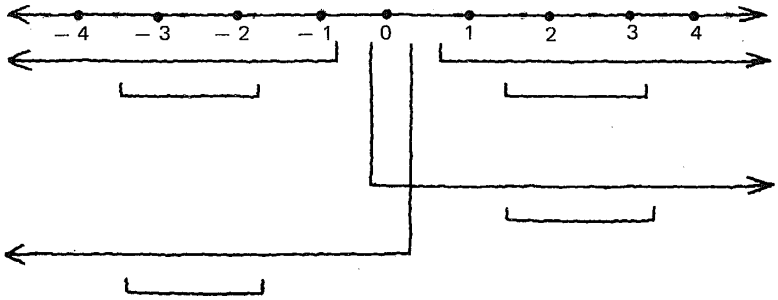
Con la invención de los números negativos, el conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales experimenta su primera ampliación.



86

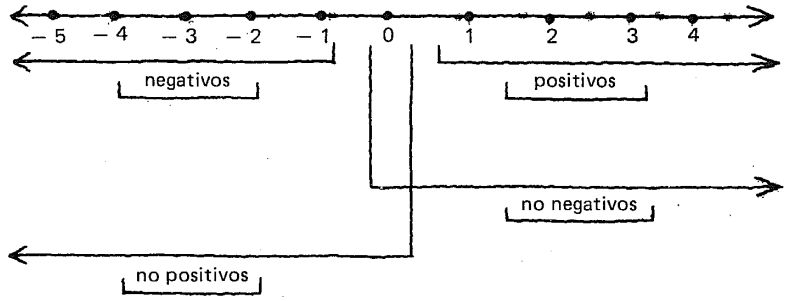
Pongamos cada uno de estos términos
- positivos
- negativos
- no positivos
- no negativos

en la casilla que le corresponda.



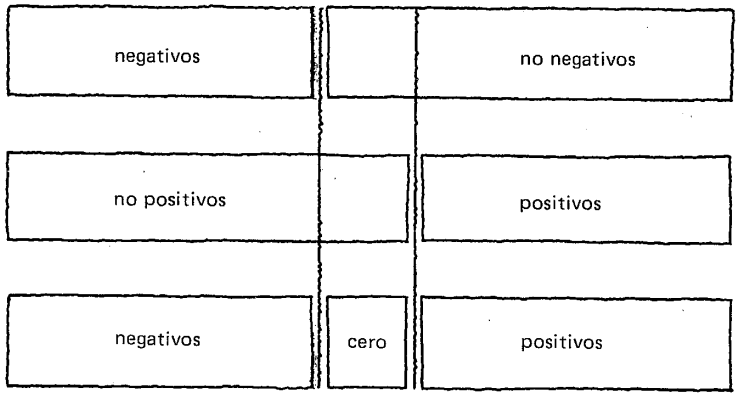
Respuesta en el cuadro siguiente

Observamos que el 0 no es **positivo ni negativo**



87

Estudiemos estas tres "particiones" posibles del conjunto de los enteros.



88 Completemos el cuadro siguiente, escribiendo cada una de las expresiones $x = 0$, $x > 0$, $x \geqslant 0$, $x < 0$ y $x \leqslant 0$ en la casilla correspondiente.

negativos		no negativos
no positivos		positivos
negativos	cero	positivos

Respuesta en el cuadro siguiente

$x \in \mathbb{Z}$

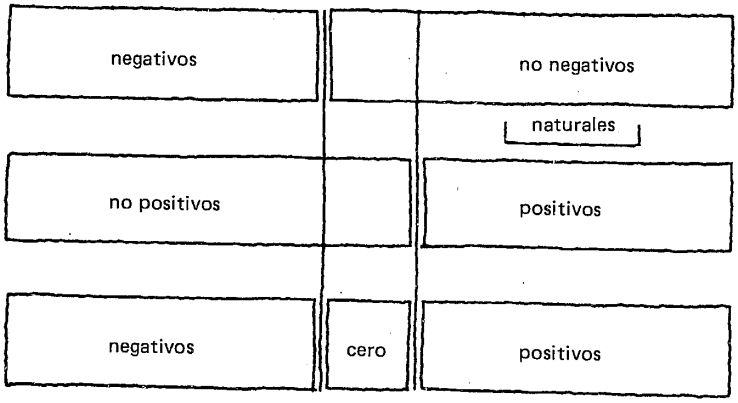
negativos		no negativos
$x < 0$		$x \geqslant 0$
no positivos		positivos
$x \leqslant 0$		$x > 0$
negativos	cero	positivos
$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$

89 Colocar la palabra "naturales" en la casilla que corresponda.

negativos		no negativos
no positivos		positivos
negativos	cero	positivos

Respuesta en el cuadro siguiente.

Vemos que los números **naturales** pueden también ser llamados: **enteros** no negativos.



90

Mucha atención.

Si representamos por **a**
un número entero, debemos
tener en cuenta que este puede ser:

positivo
o
negativo
o
cero.

91

Si

a representa un número positivo,

— a representa un número [_____]

Si, por ejemplo, a = 5, — a = [____]

negativo

— 5

92

Atención.

Si a representa un número **negativo,**

— a representará un número [ ]

Si, por ejemplo, a = — 7, — a = — (— 7) = [ ]

positivo

7

93

Aunque al principio nos pueda parecer extraño,

— a puede representar un número **positivo.**

94

¡Atención!

Si a representa un número entero cualquiera (negativo o no negativo),

necesitamos un símbolo para representar un número **no negativo** (positivo o cero).

Tal símbolo es: | a |

95

¡Atención!

A $|a|$

le llamaremos

valor absoluto de a (o **módulo** de **a**)

y representará un número **no negativo.**

96

¡Atención!

Si $a \in \mathbb{Z}$

a podrá ser **negativo, positivo** o **cero;**

en cambio,

$|a|$ será siempre ⌊_____⌋

no negativo
o sea
positivo o cero

97

Entonces:

$|9| =$ ⌊__⌋

9

98

$|-6| = \square$

6

99

$|0| = \square$

0

100

Si $a \in \mathbb{Z}$

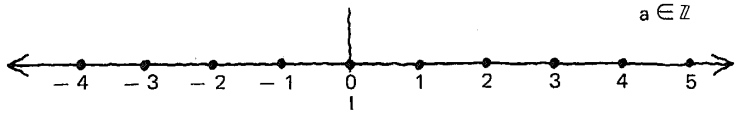
$|a| \in \mathbb{N}$

V/F

V

101

Señalar la opción correcta.



Cuando escribimos a > 0 queremos decir que

a es _____

positivo/negativo/no positivo/no negativo

positivo

Cuando escribimos a < 0 queremos dar a entender que

a es _____

positivo/negativo/no positivo/no negativo

negativo

102

Señalar la opción correcta.

Cuando escribimos a $\geqslant 0$
significa que
a es _____

positivo/negativo/no positivo/no negativo

no negativo
(positivo o cero)

Cuando nos encontramos con la
expresión a $\leqslant 0$ debemos entender que
a es _____

positivo/negativo/no positivo/no negativo

no positivo
(negativo o cero)

103

En cuanto al carácter positivo o negativo de **a**
la expresión **a** $= 0$ deberá ser interpretada así:

_____

a no es ni positivo
ni negativo

104

$a, b \in \mathbb{Z}$

Si sabemos que $a > b$, a debe estar
└_____┘ de b, en la gráfica de $\mathbb{Z}$.
a la izquierda/a la derecha

a la derecha

105

$a, b \in \mathbb{Z}$

Si a se encuentra a la izquierda de b,
en la gráfica de $\mathbb{Z}$, podemos afirmar que:

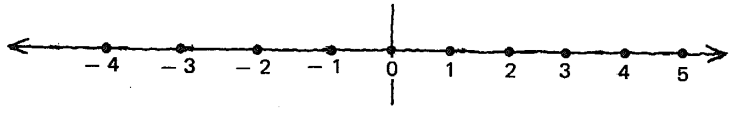
a es └_____┘ b.
mayor que/menor que

menor que

106

Completar, dando la posición de a con respecto a b.

$a, b \in \mathbb{Z}$



Si $a = b$,

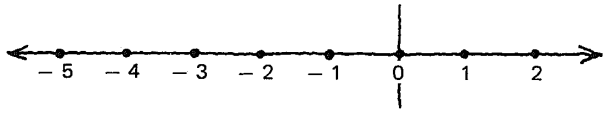
a └_____┘ b

en la representación gráfica de $\mathbb{Z}$.

coincide con,
o bien
ocupa el mismo lugar que
o bien
no está ni a la derecha
ni a la izquierda de

107

Señalar la opción correcta.



– 4 es ⌊_____⌋ – 2
mayor que/menor que
pues vemos que
en la representación gráfica de $\mathbb{Z}$,

– 4 está ⌊_____⌋ de – 2
a la derecha/a la izquierda

menor que

a la izquierda

108

5 ⌊_____⌋ – 27
$>$ o $<$

$>$

109

Hemos visto que:

$x \in \mathbb{Z}$

si x es positivo, – x es ⌊_____⌋

es decir que:

si $x > 0$, $-x$ ⌊_____⌋ 0

negativo

$<$

110

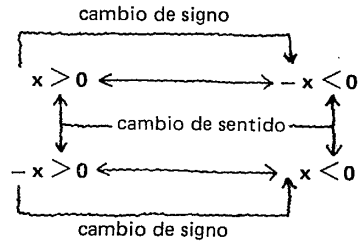
Completar, para $x \in \mathbb{Z}$.

Si $x < 0$, entonces $-x$ ⌊____⌋

> 0

111

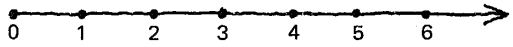
No olvidar lo que aparece representado en estos esquemas, pues habrá de sernos de gran utilidad más adelante.



1.3.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

112



Ahora bien,
en el conjunto de los **naturales,**
¿existe un **elemento menor** que todos los demás?

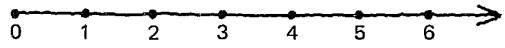
Sí/No

En caso de que exista,
tal elemento es ⌊_____⌋

Sí

0

113



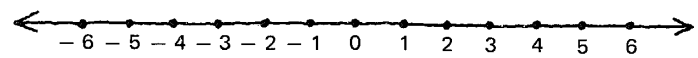
En el conjunto de los **naturales,**
¿existe un **elemento mayor** que todos los demás?

Sí/No

En caso de que exista,
tal elemento es ⌊_____⌋

No

114



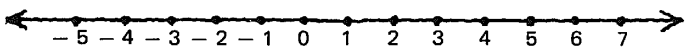
En el conjunto de los **enteros,**
¿existe un **elemento menor** que todos los demás?

Sí/No

En caso de que exista, tal elemento es ⌊_____⌋

No

115



En el conjunto de los **enteros,**
¿existe un **elemento mayor**
que todos los demás?

Sí/No

En el caso de que exista,
tal elemento es ⌊_____⌋

No

116

El conjunto de los enteros, representado
por extensión o enumeración de los elementos,
se escribe así:

$\mathbb{Z} =$ ⌊_____⌋

$\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots\}$
o
$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

117

El conjunto de los enteros,
representado por comprensión
utilizando la notación descriptiva,
toma el siguiente aspecto:

⌊_____⌋

$\mathbb{Z} = \{x | x \text{ es un número entero}\}$

118

Por definición:

los enteros → $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ ← los negativos

los naturales ↑

119

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Es decir:

$\mathbb{N}$ está estrictamente incluido en $\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{Z}$

V/F

V

120

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$ está incluido / es un subconjunto de $\mathbb{Z}$

V/F

V

121

Atención.

$\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}$

V/F

- F

$\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \neq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

122

$\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{N}$

V/F

V

123

$\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{N}$

V/F

F

124

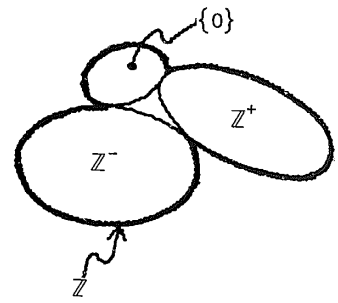
$\mathbb{Z}^-$ y $\mathbb{Z}^+$

Son conjuntos **disjuntos** o **ajenos.**

V/F

• V

Gráficamente



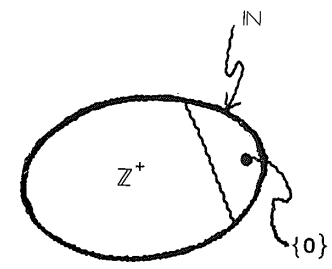
125

$\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{N}$

Son conjuntos disjuntos o ajenos.

V/F

• F



126

$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^+ =$ ____

$\mathbb{Z}^+$

127

$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^- = \square$

ϕ

128

$\mathbb{N} - \{0\} = \square$

$\mathbb{Z}^+$

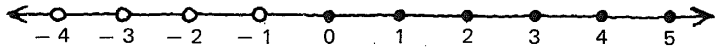
129

$\mathbb{Z} - \{0\} = \square$

$\mathbb{Z} - \{0\} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$
$= \{x | x \in \mathbb{Z} \quad x \neq 0\}$

130

-Hemos extendido el **conjunto** $\mathbb{N}$ mediante la invención de los **negativos** para formar el **conjunto** $\mathbb{Z}$.



Pero queremos que las propiedades estudiadas para $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \times)$ y $(\mathbb{N}, +\ \times)$ se sigan cumpliendo para $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \times)$ y $(\mathbb{Z}, +\ \times)$.

Véase submódulo siguiente.

1.3.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* el conjunto de los enteros como la unión del conjunto de los naturales y el conjunto de los negativos, o como una extensión del conjunto de los naturales;
- *identificar* los números positivos, negativos, no positivos y no negativos, de un conjunto dado de números;
- *simbolizar* los números positivos, negativos, no negativos y no positivos;
- *explicar* el concepto de valor absoluto;
- *usar* correctamente el símbolo de valor absoluto;
- *efectuar* operaciones conjuntistas (intersección, unión, diferencia, inclusión) con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^-$.

3.6

El grupo abeliano de la adición en $\mathbb{Z}$

131

Intentemos definir la **suma o adición de enteros,** representada por

$$(\mathbb{Z}, +)$$

observando una por una las propiedades que debe cumplir.

132

- **Cerradura o clausura**

  La adición **deberá estar definida** en $\mathbb{Z}$ como lo ha estado en $\mathbb{N}$.

133

• **Existencia de elemento neutro**

¿Es válido el **cero** como elemento neutro de la **adición en** $\mathbb{Z}$ como lo es para la **adición en** $\mathbb{N}$?

Sí/No

Sí

$a + 0 = a$

para toda $a \in \mathbb{Z}$

134

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 5 + 0 &= 5 \\ 0 + 0 &= 0 \\ -5 + 0 &= -5 \end{aligned}$$

135

• **Existencia de inversos para todos los elementos de** $\mathbb{Z}$.

Sabemos que en $\mathbb{N}$ no existen inversos aditivos para todos sus elementos.

Por ejemplo:

no existe en $\mathbb{N}$ un número a' tal que:

$5 + a' = 0$

Véase el cuadro siguiente.

136

En $\mathbb{Z}$, dejaremos establecido que:

$1 + (-1) = 0$, por lo que: -1 es el inverso aditivo de 1
$2 + (-2) = 0$ -2 es el inverso aditivo de 2
$3 + (-3) = 0$ -3 es el inverso aditivo de 3
$4 + (-4) = 0$ -4 es el inverso aditivo de 4

y en general:

$a + (-a) = 0$ $-a$ es el inverso aditivo de a

137

Ahora bien, de acuerdo con lo establecido en el cuadro anterior:

$5 + (-5) = 0$

y de acuerdo con lo que sabemos acerca de la resta o sustracción en $\mathbb{N}$:

$5 - 5 = \square$

0

138

Puesto que hemos encontrado que:

$$\text{y} \begin{matrix} 5 + (-5) = 0 \\ 5 - \ \ 5 \ \ = 0 \end{matrix}$$

podemos escribir:

$5 + (-5) = 5 - 5$

o bien:

$+ (-5) = \square$

-5

139

De manera más general:

puesto que $a + (-a) = \square$
y $a - a = \square$

podemos escribir, con base en lo encontrado en el cuadro anterior

$\square = \square$

o bien:

$\square = \square$

0
0

$a + (-a) = a - a$

$+ (-a) = -a$

140

$a + (-a) = a - a$
$+ (-a) = -a$

Esto nos indica que:

Sumar un número negativo equivale a restar su inverso aditivo.

141

Podemos escribir:

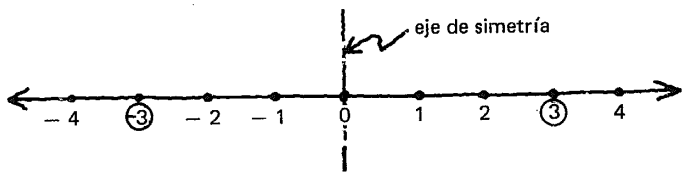
$$a - b = a + \underbrace{(-b)}$$

inverso aditivo de b

lo que nos permitirá más adelante, definir la **sustracción** como operación **inversa** de la adición.

142

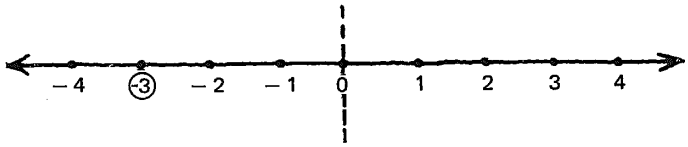
Observemos, ahora, la **simetría** en la ubicación de los inversos en la gráfica de $\mathbb{Z}$, por esta razón al **inverso aditivo** suele llamársele simétrico.



Por ejemplo:

– 3 es el **simétrico** de **3.**

143



_____ es el simétrico o inverso aditivo de – 3

3

144

Es decir que:

$$-(-3) = 3$$

pues ya habíamos visto que, en general:

$$-(-a) = a$$

En otras palabras:

"Restar un número negativo equivale a sumar su inverso (positivo)."

145

En resumen, podemos efectuar las simplificaciones siguientes en la escritura:

- $a + (-b) = a - b$
- $a - (-b) =$ [_____]

$a + b$

146

Tomemos nota de estas dos importantes expresiones:

- $a + (-b) = a - b$
- $a - (-b) = a + b$

147

Por ejemplo:

$7 + (-3) =$ [_____]

$7 + (-3) = 7 - 3 = 4$

148

$7 - (-3) = \square$

$7 - (-3) = 7 + 3 = 10$

149

Atención.

$-7 - (-3) = -7 + 3$

y puesto que debe verificarse la

conmutatividad en el segundo miembro:

$\square$

3 − 7

150

Entonces, tenemos:

$$-7 - (-3) = -7 + 3$$
$$= 3 - 7$$

Y por la definición de número negativo a partir de la diferencia de dos números naturales, siendo el minuendo menor que el sustraendo:

$\square$

$-(7 - 3)$

Ver cuadro 76.

151

$$-7-(-3)=-7+3$$
$$=3-7$$
$$=-(7-3)$$

Finalmente, simplificando el resultado, obtenemos:

$$\square$$

-4

152

Estudiemos con mucha atención.

$$-7-(-3)=-7+3$$
$$=3-7$$
$$=-(7-3)$$
$$=-4$$

153

Completemos este resumen:

$$7+\quad 3=10$$
$$7+(-3)=4$$
$$-7+\quad 3=-4$$
$$\square=\square$$

$-7+(-3)=-10$

154

Este cuadro debe ser estudiado con mucha atención.

Operaciones indicadas	Expresiones simplificadas
$7 + 3 = 10$	$7 + 3 = 10$
$7 + (-3) = 4$	$7 - 3 = 4$
$-7 + 3 = -4$	$-7 + 3 = -4$
$-7 + (-3) = -10$	$-7 - 3 = -10$

155

Podemos resumir en cuatro reglas lo que hemos encontrado en los cuadros anteriores.

Reglas para la adición en $\mathbb{Z}$

- $a + b = |a| + |b|$ si a y b son **ambos no negativos**
  Ejemplo: $5 + 3 = 8$
- $a + b = -(|a| + |b|)$ si **a y b** son **ambos negativos**
  Ejemplo: $-5 - 3 = -8$
- $a + b = |a| - |b|$ si $|a| \geq |b|$ y **a es positivo y b negativo**
  Ejemplo: $5 - 3 = 2$
- $a + b = -(|a| - |b|)$ si $|a| > |b|$ y **a es negativo y b positivo**
  Ejemplo: $-5 + 3 = -2$

156

Así definida, la suma o adición de enteros, representada por $(\mathbb{Z}, +)$, cumple con las siguientes propiedades:

1.	Cerradura	Sí
2.	Asociatividad	Sí
3.	Existencia de elemento neutro (0)	Sí
4.	Existencia de inversos	Sí
5.	Conmutatividad	Sí

Con ayuda de la **tabla de estructuras** dada en el módulo anterior, podemos decir que:

$(\mathbb{Z}, +)$ es un [_____]

grupo abeliano

157

Tabla binaria de $(\mathbb{Z}, +)$

+	−n		−3	−2	−1	0	1	2	3		n
−n	−n−n		−n−3	−n−2	−n−1	−n	−n+1	−n+2	−n+3		0
−3	−3−n		−6	−5	−4	−3	−2	−1	0		−3+n
−2	−2−n		−5	−4	−3	−2	−1	0	1		−2+n
−1	−1−n		−4	−3	−2	−1	0	1	2		−1+n
0	−n		−3	−2	−1	0	1	2	3		n
1	1−n		−2	−1	0	1	2	3	4		1+n
2	2−n		−1	0	1	2	3	4	5		2+n
3	3−n		0	1	2	3	4	5	6		3+n
n	0		n−3	n−2	n−1	n	n+1	n+2	n+3		n+n

1.3.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la suma o adición en $\mathbb{Z}$ como un grupo abeliano;
- *establecer* las reglas para la suma o adición de los números enteros.

3.7

El monoide abeliano de la multiplicación en $\mathbb{Z}$

158

Consideremos ahora
la operación binaria de

multiplicación de enteros,

representada por la expresión:

$$a \times b = c$$

Conoceremos cuáles propiedades se cumplen
en ella y determinaremos sus reglas.

159

- **Cerradura o clausura**

  La multiplicación
  deberá estar definida en $\mathbb{Z}$
  como lo ha estado en $\mathbb{N}$.

160

● **Existencia de elemento neutro**

¿Es válido el 1 como elemento neutro
de la **multiplicación en** $\mathbb{Z}$,
como lo es para la multiplicación en $\mathbb{N}$?

Sí/No

Sí

$a \times 1 = a$
para toda $a \in \mathbb{Z}$

161

Veamos algunos ejemplos:

$$5 \times 1 = 5$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$(-5) \times 1 = -5$$

Observemos a través del tercer ejemplo,
que el producto de un entero negativo por
un entero positivo deberá ser ┗_____┛

negativo

162

Ahora bien,
sabemos que
el producto de dos
enteros positivos es ┗_____┛

positivo

163

Pero,
¿cómo deberá ser
el **producto de dos**
enteros negativos?

Por ejemplo:

(– 5) × (– 4)

164

Para determinarlo, veamos lo que pasa con la

distributividad de la multiplicación con respecto
a la suma, en el conjunto de los enteros.

Recordemos que en $\mathbb{N}$
se cumple

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

y queremos que se siga cumpliendo en $\mathbb{Z}$.

Véase el cuadro siguiente.

165

Tomemos tres enteros cualesquiera:

– 3 7 – 5

Deberá cumplirse, por ejemplo, que:

$[(-3) + 7] \times (-5) =$ [_____]

Respuesta
en el
cuadro siguiente

166

$$\underbrace{[(-3)+7]}\times(-5)=(-3)\times(-5)+\underbrace{7\times(-5)}$$

$$\square\times(-5)=(-3)\times(-5)+\square$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

167

$$\underbrace{[(-3)+7]}\times(-5)=(-3)\times(-5)+\underbrace{7\times(-5)}$$

$$\underbrace{4\times(-5)}=(-3)\times(-5)+\underbrace{(-35)}$$

$$\square=(-3)\times(-5)-35$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

168

$$\underbrace{[(-3)+7]}\times(-5)=(-3)\times(-5)+\underbrace{7\times(-5)}$$

$$\underbrace{4\times(-5)}=(-3)\times(-5)+\underbrace{(-35)}$$

$$-20=\underbrace{(-3)\times(-5)}-35$$

$$-20=\square\ \text{(debe ser)}\ -35$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$[(-3) + 7] \times (-5) = (-3) \times (-5) + 7 \times (-5)$$

$$4 \times (-5) = (-3) \times (-5) + (-35)$$

$$-20 = (-3) \times (-5) - 35$$

debe ser

$$-20 = +15 - 35$$

para que → $-20 = -20$

169

Puesto que, para que se cumpla la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma, cuando menos en este caso particular, debe verificarse la igualdad:

$$(-3) \times (-5) = +15$$

debemos aceptar que:

El **producto** de **dos enteros negativos** debe ser **positivo.**

170

¿y qué pasa con el **cero** como factor?

Veamos:

$5 \times 0 = \square$ 0
$0 \times 0 = \square$ 0
$(-5) \times 0 = \square$ 0

171

$$5 \times 0 = 0$$
$$0 \times 0 = 0$$
$$(-5) \times 0 = 0$$

En general,

$$a \times 0 = 0$$

para toda $a \in \mathbb{Z}$

Se suele dar el nombre de

elemento absorbente

a un elemento
con la característica señalada.

172

Las anteriores observaciones nos llevan
a formular las dos reglas siguientes.

Reglas para la multiplicación en $\mathbb{Z}$

- $a \times b = |a| \times |b|$ si **a y b** son ambos positivos o negativos o si uno o ambos son cero.
  Ejemplo $3 \times 4 = 12$
  $(-3)(-4) = 12$

- $a \times b = -(|a| \times |b|)$ si **a** es positivo y **b** es negativo o viceversa.
  Ejemplo $3 \times (-4) = -12$
  $(-3) \times 4 = -12$

173

Ésta es la familiar **regla de los signos para la multiplicación de enteros.**

X	+	−
+	+	−
−	−	+

174

Tabla binaria de $(\mathbb{Z}, X)$

X	− n		− 3	− 2	− 1	0	1	2	3		n
− n	n^2		3n	2n	n	0	− n	−2n	−3n		$-n^2$
− 3	3n		9	6	3	0	− 3	− 6	− 9		−3n
− 2	2n		6	4	2	0	− 2	− 4	− 6		−2n
− 1	n		3	2	1	0	− 1	− 2	− 3		− n
0	0		0	0	0	0	0	0	0		0
1	− n		− 3	− 2	− 1	0	1	2	3		n
2	−2n		− 6	− 4	− 2	0	2	4	6		2n
3	−3n		− 9	− 6	− 3	0	3	6	9		3n
n	$-n^2$		−3n	−2n	− n	0	n	2n	3n		n^2

175

Así definida, la **multiplicación de enteros** cumple con las siguientes propiedades.

		Sí/No
1.	Cerradura	
2.	Asociatividad	
3.	Existencia de elemento neutro	
4.	Existencia de inversos	
5.	Conmutatividad	

Elemento absorbente ⌊____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

Propiedades de $(\mathbb{Z}, X)$

1.	Cerradura	Sí
2.	Asociatividad	Sí
3.	Existencia de elemento neutro (1)	Sí
4.	Existencia de inversos	No
5.	Conmutatividad	Sí

Elemento absorbente: 0

176

Por cumplir las propiedades señaladas en el cuadro anterior, $(\mathbb{Z}, X)$ es un:

monoide abeliano.

1.3.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la multiplicación en $\mathbb{Z}$ como un monoide abeliano;
- *establecer* las reglas para la multiplicación de enteros.

3.8

El anillo $(\mathbb{Z}, +, \times)$

177

Consideremos la estructura:

$(\mathbb{Z}, +, \times)$

178

Completemos la tabla siguiente, señalando las propiedades que cumple la estructura:

$(\mathbb{Z}, +, \times)$

		Sí/No
Operación +	Cerradura	
	Asociatividad	
	Existencia de elemento neutro	
	Existencia de inversos	
	Conmutatividad	
Operación ×	Cerradura	
	Asociatividad	
	Existencia de elemento neutro	
	Existencia de elementos inversos	
	Conmutatividad	
+/×	Distributividad ×/+	

Respuesta en el cuadro siguiente

Operación +	Cerradura	Sí
	Asociatividad	Sí
	Existencia de elemento neutro*	Sí
	Existencia de elementos inversos	Sí
	Conmutatividad	Sí

Operación ×	Cerradura	Sí
	Asociatividad	Sí
	Existencia de elemento neutro**	Sí
	Existencia de elementos inversos	No
	Conmutatividad	Sí

+ ×	Distributividad ×/+	Sí

* El elemento neutro es el cero.

** El elemento neutro es el uno.

179

Dadas las propiedades que cumple, la estructura

$(\mathbb{Z}, +, \times)$

es un [_____]

anillo unitario conmutativo o anillo conmutativo con unidad

1.3.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la estructura $(\mathbb{Z}, +, \times)$ como un anillo unitario conmutativo, dando las propiedades que se cumplen en ella.

3.9

El grupoide de la sustracción en $\mathbb{Z}$.

180

Concentremos nuestra atención
en la **resta o sustracción de enteros,**
representada por:

$(\mathbb{Z}, -)$

181

Recordemos que:

$$\begin{aligned} 7 - \quad 3 &= \square \\ 7 - (-3) &= \square \\ -7 - \quad 3 &= \square \\ -7 - (-3) &= \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4 \\ & 10 \\ - & 10 \\ - & 4 \end{aligned}$$

182

$$7 - 3 = 4$$
$$7 - (-3) = 7 + 3 = 10$$
$$-7 - 3 = -10$$
$$-7 - (-3) = -7 + 3 = -4$$

183

Podemos, entonces, completar la tabla binaria de $(\mathbb{Z}, -)$

−	− n		− 3	− 2	− 1	0	1	2	3		n
− n											
− 3											
− 2											
− 1											
0											
1											
2											
3											
n											

a − b = c

Respuesta en el cuadro siguiente

Tabla binaria de (, −)

—	− n		− 3	− 2	− 1	0	1	2	3		n
− n	0		−n+3	−n+2	−n+1	−n	−n−1	−n−2	−n−3		−2n
− 3	−3+n		0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6		−3−n
− 2	−2+n		1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5		−2−n
− 1	−1+n		2	1	0	− 1	− 2	− 3	− 4		−1−n
0	+n		3	2	1	0	− 1	− 2	− 3		− n
1	1+n		4	3	2	1	0	− 1	− 2		1−n
2	2+n		5	4	3	2	1	0	− 1		2−n
3	3+n		6	5	4	3	2	1	0		3−n
n	2n		n+3	n+2	n+1	n	n−1	n−2	n−3		0

a < b

a > b

a = b

184

Completar la tabla de **propiedades de la sustracción de enteros.**

$(\mathbb{Z}, -)$ cumple con:

		Sí/No
1.	Cerradura	
2.	Asociatividad	
3.	Existencia de elemento neutro	
4.	Existencia de elementos inversos	
5.	Conmutatividad	

Elemento absorbente [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$(\mathbb{Z}, -)$ cumple con:

1.	Cerradura	Sí
2.	Asociatividad	No
3.	Existencia de elemento neutro* 0	Sí
4.	Existencia de elementos inversos**	Sí
5.	Conmutatividad	No

Elemento absorbente: No hay

- $(\mathbb{Z}, -)$ es un [ ]

*Cero es el elemento neutro.
**Cada elemento es el inverso de sí mismo.

(No hemos considerado un nombre para tal estructura; algunos le llaman *grupoide*)

185

Atención.

No debemos olvidar que
la resta o sustracción de enteros
no es ni **asociativa** ni **conmutativa.**

1.3.9

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la sustracción en $\mathbb{Z}$ como una débil estructura que no cumple con las propiedades de asociatividad y conmutatividad.

3.10

La división en $\mathbb{Z}$

186

Por último, analicemos brevemente la **división** en el conjunto de los **enteros**, representada por

$(\mathbb{Z}, \div)$

187

¿Se cumple la propiedad de **cerradura o clausura** para la división de enteros?
Dicho de otra manera, ¿es la división una operación cerrada en $\mathbb{Z}$?

O bien: $a \div b = c$

para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Sí/No

- No

Por ejemplo:

$2 \div 5 = ?$

(No existe resultado en $\mathbb{Z}$)

188

Lo anterior sugiere que necesitaremos hacer una **nueva ampliación** al conjunto de números que hasta este momento aceptamos, para que la operación de **división** pueda definirse.

189

En $\mathbb{Z}$,
¿para qué casos
se define la división?

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\frac{a}{b} = c$$

se define en $\mathbb{Z}$
únicamente para

a = múltiplo de b

es decir,

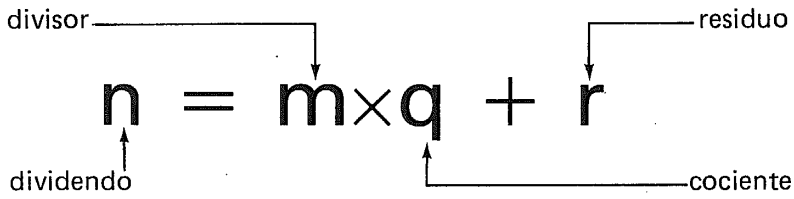
cuando a es divisible entre b.

190

Cabe hablar de la llamada

división entera,

en que



para m, n, q, r $\in \mathbb{Z}$

1.3.10

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* por qué la división no está definida en $\mathbb{Z}$.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100